Επομένως, ισχύει ΚΠΕΝ

Χώρος Συναρτήσεων

Ορισμός

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $F(A,\mathbb{R})$ το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο $\mathbb{R}$. Στο σύνολο $F(A,\mathbb{R})$ ορίζουμε τις εξής πράξεις:

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

Επίσης, ορίζουμε το γινόμενο ενός στοιχείου του $\mathbb{R}$ με μια συνάρτηση ως εξής:

$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

Αποδεικνύεται ότι ο $F(A,\mathbb{R})$ με τις παραπάνω πράξεις είναι διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{R}$.

Με ουδέτερο στοιχείο ως προς την + την $O(x)=0 \ \forall x \in A$.

Με αντίθετο στοιχείο ως προς + της $f \in F(A,\mathbb{R})$ την $-f \in F(A,\mathbb{R})$.

$(-f)(x) = -f(x)$

Πρόταση

Θεωρούμε μια ακολουθία $(f_n) \subseteq F(A,\mathbb{R})$ και έστω $x \in A$. Τότε η $(f_n(x))$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εάν η $(f_n(x))$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, το όριο της είναι μοναδικό. Έστω $D \subseteq A$ τ.ω. για κάθε $x \in D$ η $(f_n(x))$ να συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. $1/\varepsilon$

Τότε έχουμε μια αντιστοιχία από το σύνολο D στο $\mathbb{R}$, η οποία αντιστοιχεί σε κάθε $x \in D$ κάποιο $f(x)$. $1/\varepsilon$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ $x \mapsto f(x)$

→ Για κάποιο $x \in D$ θα λέμε ότι $f_n(x) \to f(x)$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

Ορισμός

Εάν $\forall x \in A$ (ή σε κάποιο υποσύνολο του D) έχουμε ότι $(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$ λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στην f στο σύνολο A (ή αντίστοιχα στο D)

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

→ $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ στο A (κ.σ.: κατά σημείο)

→ $\lim f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} f$ στο A

▶ Το n_0 το οποίο εμφανίζεται στον ορισμό της κατά σημείου σύγκλισης εξαρτάται από το x ΚΑΙ από το ε:
$n_0 = n_0(\varepsilon, x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
Θεωρούμε την εξής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in \mathbb{J} \cap [0,1] \end{cases}$$

Υπενθύμιση
$\mathbb{J}$ = άρρητοι

το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, οπότε

$\boxed{\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}}$ ← ρητοί του [0,1] (*)

Ορίζουμε ακολουθία $(f(n))$ με πεδίο ορισμού το [0,1].
($f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$)

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in r_1 \\ 0, & x \neq r_1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1, r_2 \\ 0, & x \neq r_1, r_2 \end{cases}, \dots,$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in r_1, r_2, \dots, r_n \\ 0, & x \neq r_1, r_2, \dots, r_n \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στο [0,1]
◦ Έστω $x \in [0,1]$, τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \to$ τότε το x θα έχει κάποια θέση στην αρίθμηση (x), δηλαδή θα $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ του $x = r_{n_0}$. Οπότε, $f_n(x) = f_n(r_{n_0}) = 1$, για κάθε $n \geq n_0$

Οπότε, σε αυτή την περίπτωση $f_n(x) = 1$ και $\lim_n f_n(x) = 1$

2) $x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \to$ τότε $f_n(x) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Άρα για αυτό το x θα έχουμε $\lim_n f_n(x) = 0$

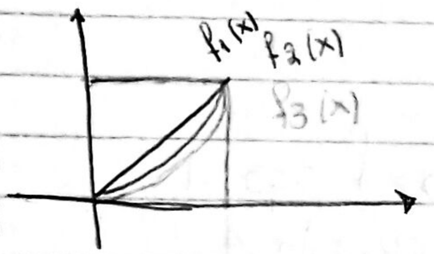
Οπότε, η $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ όπου $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in \mathbb{J} \cap [0,1] \end{cases}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κάθε μία από τις f_n είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων. Αλλά, η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο! Διότι για οποιοδήποτε $y \in [0,1]$ ισχύει ότι: $\underline{\lim}_{x \to y} f(x) \neq \lim_{x \to y} f(x)$ και συνεπώς το όριο $\nexists$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$



- Φανερά, για $x=0$ έχουμε $f_n(x) = f_n(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
- Εάν, $x \in (0,1)$ τότε: $\lim_n f_n(x) = \lim_n x^n = 0$
- Εάν, $x = 1$ τότε: $f_n(x) = f_n(1) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

→ Εάν $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, τότε $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ στο $[0,1]$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κάθε μία από τις f_n, μεν είναι συνεχής στο $[0,1]$, αλλά η f δεν είναι συνεχής στο $[0,1]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $(f_n) \subseteq F(A, \mathbb{R})$. Θα λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση f στο σύνολο A, αν ισχύει

$$\lim_n \big(\underbrace{\sup\{ |f_n(x) - f(x)| : x \in A \}}_{b_n} \big) = 0$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$\lim_n (\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\}) = 0 \iff$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ |b_n - 0| \leq \varepsilon,\ \forall n \geq n_0$ ή

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\} \leq \varepsilon,\ \forall n \geq n_0$ ή

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in A$

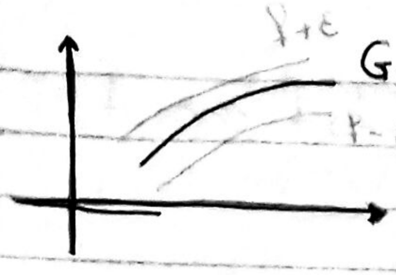
Φανερά, $n_0 = n_0(\varepsilon)$, $\nexists$ εξάρτηση δηλαδή στην ομοιόμορφη σύγκλιση, του n_0 από την επιλογή του x.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

$f_n \xrightarrow{ομ/φα} f$ ή $f_n \rightarrow f$ στο A. ή $\lim_n f_n = f$ στο A
(η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο σύνολο A)

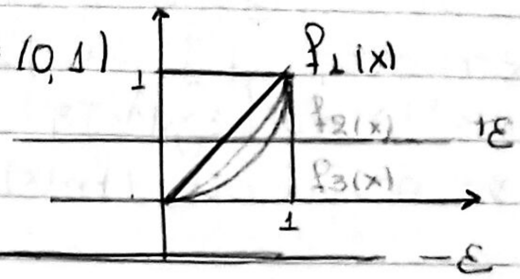
ΠΡΟΤΑΣΗ

Εφόσον, στην ομοιόμορφη σύγκλιση το $n_0 = n_0(\varepsilon)$ (εξαρτάται από το ε και όχι από το x) θα ισχύει ότι για $n \geq n_0$ το $f_n(x) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ $\forall x \in A$.
Δηλαδή, το γράφημα της "ουράς" της ακολουθίας (όροι για $n \geq n_0$) θα είναι εντός της λωρίδας που ορίζουν οι $f(x) - \varepsilon$, $f(x) + \varepsilon$.



Παράδειγμα

Έχουμε την ακολουθία $f_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$



$f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} 0$, στο $(0,1)$

Παίρνουμε ένα $\varepsilon > 0$ (μικρό) και ορίζουμε την λωρίδα $(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \mapsto (0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$.

Βλέπουμε ότι $\nexists$ "ουρά" της ακολουθίας (δηλαδή $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. f_n, $n \geq n_0$) να είναι εντός της λωρίδας $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Πάντα υπάρχει μέρος του γραφήματος των (f_n) που είναι εκτός.

Θα αποδείξουμε ότι η $f_n(x) = x^n$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f=0$ στο $(0,1)$

Έστω ότι $f_n \to f$ ομ/μα στο $(0,1)$, $f(x)=0$ $x \in (0,1)$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in (0,1)$

Έστω $\varepsilon = 1/4$, τότε θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|f_n(x) - f(x)| < 1/4$ $(\forall n \geq n_0)(\forall x \in (0,1))$ ή $|x^n - 0| < 1/4$ $(\forall n \geq n_0)(\forall x \in (0,1))$ ή

$x^n < 1/4 \ (\forall n \geq n_0)(\forall x \in (0,1))$ (1)

- Έστω $x = 1 - 1/n$, τότε $x \in (0,1)$

Συνεπώς, λόγω της (1) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{4}$, $\forall n \geq n_0$ ή

$$\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{-n}\right)\right)^{-n}} < \frac{1}{4}, \quad \forall n \geq n_0 \quad (2)$$ αλλά $$\lim_n \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{-n}\right)\right)^{-n}} = \frac{1}{e}$$

Οπότε, λόγω της (2) $\frac{1}{e} < \frac{1}{4}$ Άτοπο!

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Παρατηρηση

1) Εάν $f_n : A \to \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ και $f_n \xrightarrow{\text{ομ/φα}} f$ στο A, τότε η $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$.

2) Εκτός, από πιθανούς περιορισμούς του πεδίου ορισμού $D \subseteq A$ στο οποίο ορίζεται η οριακή συνάρτηση, μπορούμε να πούμε ότι αυτή ορίζεται μονοσήμαντα και επιλέγουμε συνήθως ως D το μεγαλύτερο δυνατό σύνολο στο οποίο μπορούμε να πούμε ότι $(f_n(x))$, $x \in D$ συγκλίνει.

Ασκηση

Έστω $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω, επίσης, $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ στο $\mathbb{R}$.

Η σύγκλιση όμως δεν είναι ομ/φη στο $\mathbb{R}$. Όμως, αν περιορίσω το π.ο. π.χ. $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in (0,1)$ η σύγκλιση είναι ομ/φη.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$, αναζητώ $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0)(\forall x \in (0,1))$ ή

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \ \forall x \in (0,1) \quad \text{ή}$$

$\frac{x}{n} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in (0,1)$, αλλά $\frac{x}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{x}{\varepsilon} < n$

Εάν επιλέξω $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, τότε $\forall n \geq n_0$ έχουμε

$\frac{x}{n} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

Ορισμοί

Έστω $(f_n) \subseteq F(A,\mathbb{R})$ και $f \in F(A,\mathbb{R})$ και $x \in A$ και $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

- Για $\varepsilon > 0$ (αρκετά μικρό) ορίζουμε τον φυσικό αριθμό $N_\varepsilon(x) = \min\{\mu \in \mathbb{N} : n \geq \mu \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} = B$

Λόγω ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ στο x, $\exists \mu$ τ.ω. $n \geq \mu \Rightarrow$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (δηλαδή το σύνολο B είναι μη κενό)

- Το σημείο y θα λέγεται σημείο ομοιόμορφης σύγκλισης της ακολουθίας (f_n) προς τη συνάρτηση f αν $(\forall \varepsilon > 0)$ υπάρχει περιοχή του y, $U(y)$ τ.ω. $\sup\{N_\varepsilon(x) : x \in U(y)\} < +\infty$

Εάν αυτό ισχύει, τότε θα λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο y.

Πρόταση

Αν μια ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα προς μια συνάρτηση f, τότε κάθε $y \in A$ είναι σημείο ομοιόμορφης σύγκλισης της (f_n) προς την f.

Απόδειξη

Έστω $f_n \xrightarrow{ομ/φα} f$ στο A, τότε $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \Rightarrow$
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$.

Έστω τώρα $x \in A$. Εφόσον $N_\varepsilon(x) = \min\{\mu : n \geq \mu \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$
$N_\varepsilon(x) \leq n_0$. Άρα αν $y \in A$, και $U(y)$ μια περιοχή του y ισχύει ότι $\forall x \in U(y)$ ισχύει $N_\varepsilon(x) \leq n_0$. Εφόσον αυτά ισχύουν για την τυχαία περιοχή $U(y)$ του y έχουμε:

$\sup\{N_\varepsilon(x) : x \in U(y)\} \leq n_0 < +\infty$

Άρα το τυχόν $y \in A$ είναι σημείο ομοιόμορφης σύγκλισης.

Παρατήρηση

Ακόμη και αν κάθε $x \in A$ είναι σημείο ομοιόμορφης σύγκλισης της (f_n) προς την f αυτό δεν σημαίνει ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$f_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$ $f_n \to 0$ κ.σ. στο $(0,1)$.
Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη διότι $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (0,1)\} =$
$\sup\{|x^n - 0| : x \in (0,1)\} = 1$
Είπαμε, ότι $f_n \to f$ ομ/φα στο A αν $\lim_n (\{\sup\{|f_n(x) - f(x)| :$
$: x \in (0,1)\}) = 0$. Όμως, $\lim_n \{\sup\{|x^n - 0| : x \in (0,1)\} = 1 \neq 0$

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0,1)$
-Έστω $y \in (0,1)$ και έστω επίσης $\varepsilon > 0$, αναζητούμε n_0 τ.ω.

$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ ή $|y^n - 0| < \varepsilon$ ή $y^n < \varepsilon$

$n \log y < \log \varepsilon$, $y \in (0,1) \Rightarrow \log y < 0$ $\Leftrightarrow$

$n > \log \varepsilon / \log y$

Συνεπώς, επιλέγοντας $n_0(\varepsilon, y) = \left[\frac{\log \varepsilon}{\log y}\right] + 1$

Αναζητώ, $U(y)$ τ.ω. $\sup\{N_\varepsilon(x), x \in U(y)\} < +\infty$

Έστω $U(y) = \left(\frac{y}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$. Αναζητούμε άνω φράγμα για

την $g(x) = \frac{\log \varepsilon}{\log x}$ (ΑΣΚΗΣΗ, αναζητώ μέγιστο στην $U(y)$
Αν αυτό το μέγιστο είναι πεπερασμένο τότε
και το $N_\varepsilon(x)$ είναι πεπερασμένο.
Παίρνω την παράγωγο της $g(x)$, βρίσκω μονοτονία και
λέω το άνω φράγμα να είναι πεπερασμένο)
Βρίσκω $g(x)\nearrow$, παίρνω το μέγιστο στην $U(y)$ κλπ.

ΑΣΚΗΣΗ Η.Ω. (29/11/18)

Να εξετάσετε την κατά σημείο σύγκλιση των παρακάτω συναρτήσεων:

- $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, \; x \in \mathbb{R}$

- $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}, \; x \in \mathbb{R}$